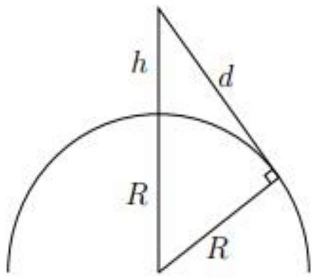
10 клас

1. Модуль «Скіапареллі» повинен був здійснити м'яку посадку на Марс в 40 км від місця роботи марсохода "Оппортьюніті". Чи міг «Оппортьюніті» спостерігати місце посадки «Скіапареллі», якщо відомо, що висота марсохода трохи менше середнього зросту людини? Існуванням рельєфу на Марсі можна знехтувати.

Начнем с выяснения радиуса Марса. В условии предыдущей задачи было сказано, что он примерно в 2 раза меньше радиуса Земли, стало быть, равен примерно $R = 3.2$ тыс. км.

Предположим, что место посадки «Скиапарелли» видно с «Оппортьюнити» в точности на горизонте. Нарисуем весьма утрированную картинку:



на которой h — необходимая высота «Оппортьюнити», d — расстояние до места посадки «Скиапарелли», R — радиус Марса.

Видно, что $R^2 + d^2 = (R+h)^2$, откуда, располагая калькулятором, несложно вычислить h. Если же калькулятора нет, то придется еще немного подумать. Перенесем первое слагаемое слева направо $d^2 = (R+h)^2 - R^2$ и разложим выражение справа как разность квадратов. Получим $d^2 = h\,(2R+h)$.

Высота «Оппортьюнити» h явно на много порядков меньше диаметра Марса $2R$, так что вторым слагаемым в скобках можно с чистой совестью пренебречь, и тогда

$$h = \frac{d^2}{2R}.$$

Подставим числа (все расстояния — в километрах):

$$h = \frac{40^2}{2 \cdot 3.2 \cdot 10^3} = \frac{1}{4} \text{ км.}$$

Это явно намного больше, чем «рост среднего человека», из чего следует сделать вывод, что увидеть место посадки «Скиапарелли» «Оппортьюнити» никак не мог.

Заметим, что задачу можно было бы решать и «наоборот» (если Вы не догадались позаимствовать данное из предыдущей задачи или совсем не помните радиус Земли): оценить высоту марсохода (например, как 1.5 м) и посчитать радиус планеты, на которой «Скиапарелли» оказался бы точно на горизонте. Он окажется больше полумиллиона километров, что для любой планеты явно многовато.

2. Вчені запустили на низьку орбіту Місяця (висота 50 км) станцію. З яким інтервалом часу ми будемо її бачити то з одного краю місячного диска, то з іншого? Маса Місяця M = $7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг, радіус Місяця R = 1738 км, гравітаційна стала $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$

Низкая орбита означает, что высотой можно пренебречь по сравнению с радиусом Луны. А значит, аппарат будет появляться рядом с лимбом дважды за период обращения вокруг Луны, через равные промежутки времени, по половине своего орбитального периода. Период лунной станции будет равен:

$$T = \frac{2\pi R_л}{V_л}$$

Vл – круговая скорость станции на окололунной орбите (т. е. первая космическая скорость для Луны).

$$V_Л = \sqrt{\frac{GM_л}{R_л}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.35 \cdot 10^{22}}{1.738 \cdot 10^6}} = 1679.5 \approx 1680 \text{ м/с}$$

<u>I вариант</u>

Значит,

$$T = \frac{2 \cdot 3.1416 \cdot 1.738 \cdot 10^6}{1680} = 6500 \text{ с} = 1.8 \text{ ч}$$

И период появления станции рядом с лимбом составит половину орбитального:

$$t = {}^{T}/_{2} = 0{,}9 \text{ часа.}$$

2 вариант

Можно не сразу подставлять численные значения в формулы, а преобразовать их, выразив период обращения через среднюю плотность Луны (величина плотности не дана в условии, но учащийся может её вычислить или знать – приближенное значение 3300 кг/м^3):

$$T = \frac{2\pi R_л}{V_л} = \frac{2\pi R_л}{\sqrt{\frac{GM_л}{R_л}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_л^3}{GM_л}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_л^3}{G\rho_л \frac{4}{3}\pi R_л^3}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_л}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3 \cdot 3{,}1416}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3{,}3 \cdot 10^3}} \approx 6540\ c \approx 1{,}8 \text{ часа.}$$

И период появления станции рядом с лимбом составит половину орбитального:

$$t = {}^{T}/_{2} = 0{,}9 \text{ часа.}$$

3 вариант

Можно решать задачу, используя 3-й закон Кеплера (в обобщённом виде):

$$\frac{T_з^2}{T^2}\frac{M + m_з}{M_л + m} = \frac{a_з^3}{R_л^3}$$

(здесь M – масса Солнца, m – масса спутника, $T_з$, $m_з$ и $a_з$ – период обращения Земли вокруг Солнца, масса Земли и радиус орбиты Земли соответственно). Возможна запись этого закона для другого набора тел, например для системы Земля – Луна (вместо системы Солнце – Земля).

Пренебрегая малыми массами по сравнению с большой, получим:

$$\frac{T_з^2}{T^2}\frac{M}{M_л} = \frac{a_з^3}{R_л^3}$$

Отсюда искомый период будет равен:

$$T = T_з\sqrt{\frac{M}{M_л}\frac{R_л^3}{a_з^3}} \approx 1{,}8 \text{ часа.}$$

И период появления станции рядом с лимбом составит половину орбитального:

$$t = {}^{T}/_{2} = 0{,}9 \text{ часа}$$

3. Всі фантастичні повісті та чи інакше пов’язують свої сюжети з науковими фактами. Але один фантаст-початківець вирішив описати в своєму оповіданні будівництво прямої монорельсової дороги в Сонячні системі від Землі до Урана (але це не можливо!). Для будівництва дороги взяли спеціально оброблений місячний ґрунт. Визначити, який шар ґрунту треба зняти з поверхні Місяця для виготовлення рейки, довжини якого вистачить, щоб по прямій з'єднати орбіти Землі і Урана. Вважати, що рейка має в перетині вид прямокутника 5х10 см, орбіта Урана кругова, а щільність рейки дорівнює густині місячного ґрунту. Діаметр Місяця 3480 км, радіус орбіти Урана 19,2 а.о

Решение:

Вычислим длину рельса:

$$l = (19{,}2 - 1) \times 1{,}5 \cdot 10^{11} = 2{,}73 \cdot 10^{12}\text{м}$$

Вычислим объём рельса (т.е. объём необходимого грунта, т.к. плотность рельса равна плотности грунта по условию):

$$V = l \times S = 2{,}73 \cdot 10^{12} \times 0{,}05 \times 0{,}1 = 1{,}365 \cdot 10^{10}\text{м}^3$$

Эта величина на много порядков меньше объёма Луны ($4/3\pi R^3 \approx 2\cdot 10^{19}$ м^3), поэтому допустимо использовать формулу для объёма шарового слоя. Как известно, объём шарового слоя радиусом R и толщиной ΔR равен $V = 4\pi\mathrm{R}^2\Delta\mathrm{R}$ *(но не обязательно использовать эту формулу, можно объём слоя искать, как разность объёма всего тела и объёма внутренней части)*.

Вычислим толщину шарового слоя, имеющего объём V, который надо снять с поверхности Луны:

$$\Delta R = \frac{V}{4\pi R^2} = \frac{1{,}365 \cdot 10^{10}}{4\pi \times (3480 \times \frac{10^3}{2})^2} \approx 3{,}6 \cdot 10^{-4}\text{м}$$

Ответ: ≈ 0,4 мм.

4. При доставці на місячну базу вантажів і пасажирів корабель виходить на колову навколомісячну орбіту з висотою 25 км над поверхнею Місяця. Над посадковим майданчиком він компенсує свою орбітальну швидкість і починає вільне падіння на Місяць. На деякій висоті включаються гальмівні двигуни, які до посадки працюють постійно. На якій висоті перед посадкою він повинен був включити гальмівні двигуни, щоб, рухаючись з постійним прискоренням, рівним двом земним прискорення вільного падіння, зробити м'яку посадку (з нульовою швидкістю)? Вважати, що зміною прискорення вільного падіння з висотою можна знехтувати. Маса Місяця в 81 разів менше земної, радіус Місяця в 3,67 рази менше радіуса Землі

Посадка корабля распадается на два этапа: 1) свободное падение (т. е. набор скорости), длящееся наибольшее время, и 2) её компенсация до нуля при конечной посадке. Оба движения равноускоренные. В первом случае ускорение корабля равно лунному ускорению свободного падения, во втором – результирующее ускорение обратно по направлению лунному и равно двум земным. Запишем уравнения, описывающие изменение скорости. Начальная скорость на первом этапе и конечная скорость на последнем этапе равны 0:

$$V_{\text{падения}} = g_Л t_{\text{падения}} \text{ и } V_{\text{торможения}} - 2g_З t_{\text{торможения}} = 0$$

Так как конечная скорость падения равна начальной скорости торможения, нам будет известно соотношение времён падения и торможения:

$$\frac{t_{\text{падения}}}{t_{\text{торможения}}} = \frac{2g_З}{g_Л} = 2\frac{G\frac{M_З}{R_З^2}}{G\frac{M_Л}{R_Л^2}} = 2\frac{M_З}{M_Л}\cdot\frac{R_Л^2}{R_З^2} = 2\cdot 81\cdot\frac{1}{3{,}67^2} \approx 12$$

Из условия следует, что:

$$S_{\text{падения}} + S_{\text{торможения}} = 25 \text{ км}$$

$$\frac{S_{\text{падения}}}{S_{\text{торможения}}} = \frac{\frac{g_Л t_{\text{падения}}^2}{2}}{V_{\text{падения}} t_{\text{торможения}} - \frac{2g_З t_{\text{торможения}}^2}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{g_Л t_{\text{падения}}^2}{2}}{g_Л t_{\text{падения}} t_{\text{торможения}} - g_З t_{\text{торможения}}^2} =$$

$$= \frac{\frac{g_Л t_{\text{падения}}^2}{2}}{\left(g_Л \frac{t_{\text{падения}}}{t_{\text{торможения}}} - g_З\right) t_{\text{торможения}}^2} = \frac{g_Л}{g_Л\left(\frac{t_{\text{падения}}}{t_{\text{торможения}}} - \frac{g_З}{g_Л}\right)}\cdot\frac{t_{\text{падения}}^2}{2t_{\text{торможения}}^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{t_{\text{падения}}}{t_{\text{торможения}}} - \frac{1}{2}\frac{t_{\text{падения}}}{t_{\text{торможения}}}}\cdot\frac{t_{\text{падения}}^2}{2t_{\text{торможения}}^2} =$$

$$= \frac{t_{\text{падения}}}{t_{\text{торможения}}} \approx 12$$

Решая систему из двух уравнений, получаем, что корабль должен начать торможение на высоте примерно 1,9 км.

5. Вчені майбутнього запропонували фантастичний проект, в ході якого весь грунт на поверхні Марса електрохімічним способом був би розкладений на вільні метал і кисень, і таким чином була б створена киснева атмосфера на планеті. Яка товщина шару грунту, який потрібно переробити, щоб тиск такий кисневої атмосфери у поверхні Марса виявилося таким же, як атмосферний тиск у поверхні Землі? Вважати, що грунт Марса складається з мінералу лимоніту з хімічною формулою Fe_2O_3 і щільністю 3.5 г / см3. Атомні ваги заліза і кисню складають 56 і 16 відповідно.

3. Решение. Атмосферное давление у поверхности Земли p составляет 10^5 Па и равно весу столба атмосферы площадью 1 м^2. Все то же самое будет относиться и к Марсу, но нельзя забывать, что ускорение свободного падения g на Марсе другое. Масса этого столба с площадью основания 1 м^2 составит:

$$m_S = \frac{p}{g} = \frac{pR^2}{GM}.$$

Здесь M и R – масса и радиус Марса. Данное выражение можно получить другим, более сложным способом. Концентрация атомов в атмосфере у поверхности Марса равна

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Здесь k – постоянная Больцмана, T – температура атмосферы. Число атомов в столбе атмосферы единичной площади есть произведение концентрации на высоту однородного столба атмосферы H:

$$n_S = nH = \frac{p}{kT} \cdot \frac{\Re T}{\mu g} = \frac{N_A p}{\mu g} = \frac{p}{mg}.$$

Здесь N_A – постоянная Авогадро, μ и m – молярная и молекулярная масса газа. Учитывая, что $m_S = m \cdot n_S$, мы вновь приходим к первой формуле решения задачи.

Масса столба оказывается равной $2.7 \cdot 10^4$ кг/м^2. Обратим внимание, что высота атмосферы и толщина грунта существенно меньше радиуса планеты, ускорение свободного падения мы считаем постоянным. Массовая доля кислорода в молекуле Fe_2O_3 равна

$$\eta = \frac{3A_O}{2A_{Fe} + 3A_O} \approx 0.3.$$

Здесь A_O и A_{Fe} – атомные веса кислорода и железа. Чтобы наполнить столб атмосферы требуемым количеством кислорода, нужно переработать столб грунта Марса той же площади (так как обработке подвергается вся планета) глубиной h. Масса этого столба будет равна

$$m_{GS} = \frac{m_S}{\eta} = m_S \frac{2A_{Fe} + 3A_O}{3A_O}.$$

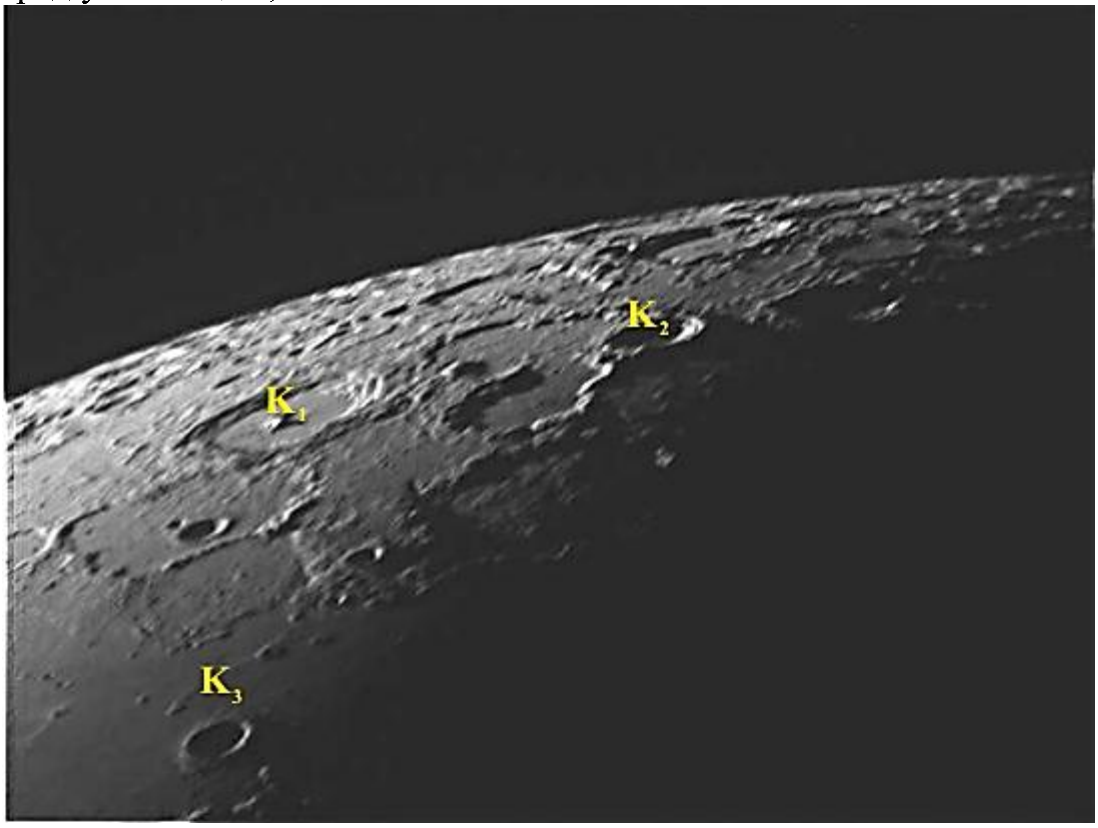
Масса столба получается равной $9 \cdot 10^4$ кг/м^2. Теперь мы можем найти его глубину

$h = m_{GS}/\rho = 25$ м.

Здесь ρ – плотность грунта, которую нужно перевести в нужные единицы (при выполнении решения в системе СИ – в кг/м^3).

Експериментальне завдання

У період з 8 по 14 серпня 2013 року на обсерваторії були проведені спостереження Місяця, зокрема, була отримана фотографія (див. мал) частини його поверхні. Використовуючи дану фотографію і дані про Місяць, оцініть лінійний і кутовий діаметри (для земного спостерігача) трьох кратерів К1 - К3. За даними спостережень професіоналів середній кутовий радіус_Місяця = 15,535', а середній лінійний радіус Місяця $1{,}737 \cdot 10^3$ км.



Числові дані, які наведені в розв'язуванні до задачі, можуть відрізнятися від отриманих Вами за рахунок використаної фотографії в іншому форматі.

Решение:

Прежде всего, определим угловой (μ_a) и линейный (μ_ℓ) масштаб фотографии следующими выражениями:

$$\mu_a = \frac{\rho''_{☾}}{R_{☾}}, \quad \mu_\ell = \frac{\Re_{☾}}{R_{☾}}, \tag{19}$$

где $\rho''_{☾} = 15.535'$ – средний угловой радиус Луны, $\Re_{☾} = 1.737 \cdot 10^3$ км – средний линейный радиус Луны, полученные по данным наблюдений профессионалов, $R_{☾}$ – линейный радиус Луны, измеренный по фотографии.

К сожалению, измерить непосредственно радиус видимого диска Луны по фотографии не представляется возможным. Поэтому будем для этого использовать несложную методику косвенного определения $R_{\odot}$. Рассмотрим круг радиуса R и круговой сегмент $ACBDA$, с высотой h и основанием $AB = 2a$ (см. рис. 7). Из треугольника $\triangle ADO$ по теореме Пифагора следует, что

$$R^2 = a^2 + (R-h)^2, \;\Rightarrow\; R = \frac{(a^2+h^2)}{2h}.$$

Т.о. для определения радиуса круга необходимо знать высоту h кругового сегмента и половину его основания – a.

Выполним дополнительное построение на данной фотографии. Проведем через верхнюю точку C части видимого диска Луны (см. рис. 8) касательную. Проведем параллельную ей прямую, через крайнюю левую точку A диска. Опустим из точки C на нее перпендикуляр CD. В результате мы получаем половину кругового сектора $ACDA$, для которого $h_{☾} = CD$, $a_{☾} = AD$ и, следовательно,

$$R_{☾} = \frac{(a_{☾}^2 + h_{☾}^2)}{2h_{☾}}. \tag{20}$$

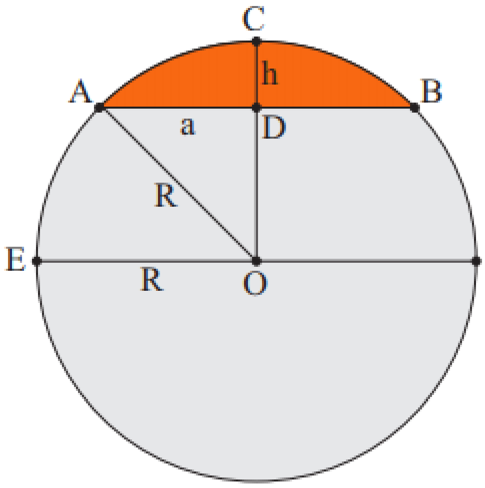


Рис. 7.

Определяя по фотографии значения $a_{☾} = 24.4$ см, $h_{☾} = 5.6$ см (ваши значения могут отличаться от указанных, в зависимости от формата используемой фотографии), в итоге получаем $R_{☾} = 55.957$ см. Тогда угловой и линейный масштаб фотографии представляются значениями $\mu_a = 16.7''/\text{см}$, $\mu_\ell = 31.0$ км/см.
Далее определяем линейные размеры отмеченных кратеров по фотографии: $d_1 = 4.4$ см, $d_2 = 2.35$ см, $d_3 = 1.6$ см.
В итоге угловые и линейные диаметры кратеров $K_1 - K_3$ есть

$$D_1'' = \mu_a \cdot d_1 = 73.5'', \quad D_1 = \mu_\ell \cdot d_1 = 136\,\text{км},$$

$$D_2'' = \mu_a \cdot d_2 = 39'', \quad D_2 = \mu_\ell \cdot d_2 = 73\,\text{км},$$

$$D_3'' = \mu_a \cdot d_3 = 27'', \quad D_3 = \mu_\ell \cdot d_3 = 50\,\text{км}.$$

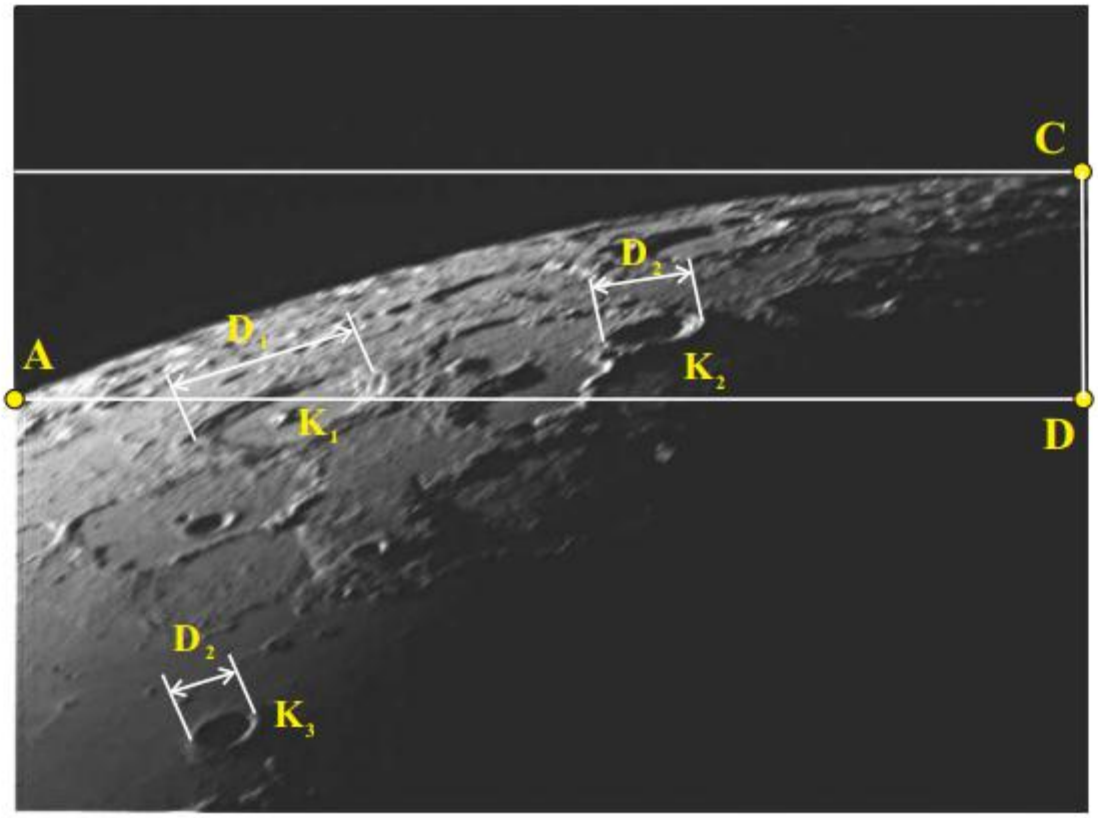


Рис. 8.

Ответ: $D_1 = 136\,\text{км}$, $D_2 = 73\,\text{км}$, $D_3 = 50\,\text{км}$; $D_1'' = 73.5''$, $D_2'' = 39''$, $D_3'' = 27''$. (\$$_{\max}$ =

2. В один із вечорів астроном-аматор (зріст якого дорівнює 175 см), що проживає на п'ятому поверсі дев'ятиповерхового будинку (див. мал), вийшов на балкон помилуватися заходом Сонця. Він спостерігав захоплюючу картину, як вершину опори лінії електропередачі (схема якої представлена на мал.), розташованої в 80 метрах від будинку, увінчала Венера. Оцініть висоту Венери над горизонтом в момент спостережень.

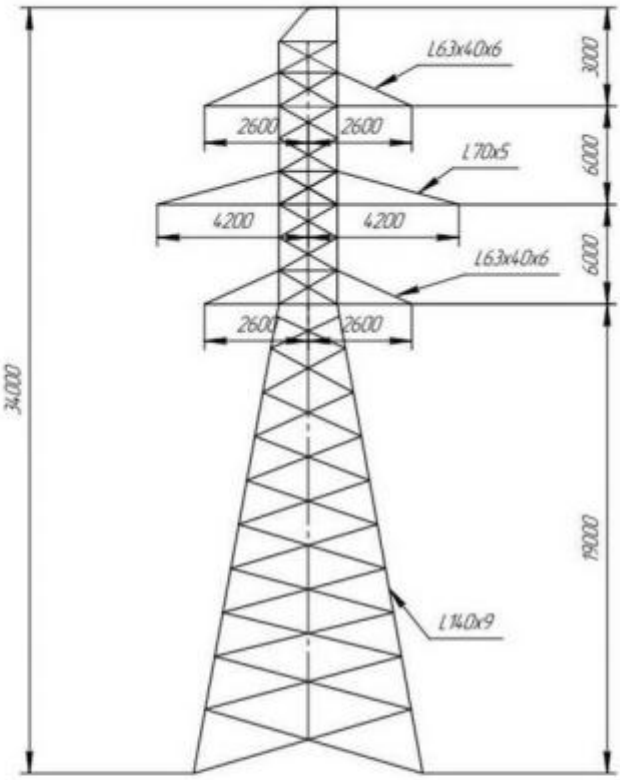


Схема опори лінії електропередачі. Розміри подано в міліметрах

Фасад дев'ятиповерхового будинку. Висота подана в міліметрах.

Задача № 8. «Высота Венеры над горизонтом»

Условие. В один замечательный вечер астроном-любитель (рост которого равен 175 см), проживающий на пятом этаже девятиэтажного дома (см. рис. 6), вышел на балкон полюбоваться закатом. Он обнаружил, что вершину опоры линии электропередачи (схема которой представлена на рис. 7), расположенной в 80 метрах от дома, венчает Венера. Оцените высоту Венеры над горизонтом в момент наблюдений. (7 баллов).

Дано:

$h_a = 1.75$ м,
$H_1 = 34.0$ м,
$H_2 = 28.0$ м,
$L = 80$ м.

Найти:

$h_♀$–?

Решение:

Для определения угловой высоты Венеры над горизонтом в момент наблюдений необходимо, прежде всего, вычислить высоту положения глаз наблюдателя над поверхностью Земли. Для этого измерим по рисунку высоту положения пола балкона 5 этажа над поверхностью Земли – $h_1 = 6.6$ см и высоту всего здания – $h_2 = 15.1$ см. Определим высоту пола балкона в метрах:

$$h_b = H_2 \frac{h_1}{h_2} = 12.24\,\text{м}.$$

Следовательно, высота положения глаз наблюдателя над поверхностью Земли есть

$$h_y = h_b + h_a = 13.99\,\text{м}.$$

Следовательно, теперь можно определить линейную высоту вершины опоры линии электропередачи над уровнем глаз астронома-любителя:

$$h_v = H_1 - h_y = 20.01\,\text{м}.$$

Следовательно, тангенс угловой высоты Венеры определяется как

$$\operatorname{tg} h_♀ = \frac{h_v}{L}, \;\Rightarrow\; h_♀ = \operatorname{arctg}\left(\frac{h_v}{L}\right) = 14°.$$

11 клас

1. Видима зоряна величина зірки Регул дорівнює + 1.4m, відстань до неї 24 пк, маса - 3.5 маси Сонця, період осьового обертання - 16 годин. Виходячи з цих даних, знайдіть мінімально можливе значення температури поверхні Регула.

4. Решение. Определим абсолютную звездную величину Регула:

$$m_A = m + 5 - 5 \lg d = -0.5.$$

Здесь d – расстояние до Регула. С учетом того, что абсолютная звездная величина Солнца равна $+4.7^m$, получаем, что светимость Регула L больше светимости Солнца L_0 в $10^{0.4 \cdot 5.2} = 120$ раз. Для светимостей L, радиусов R и температур T справедливо соотношение (индекс «0» относится к Солнцу):

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^4.$$

Отсюда мы получаем выражение для температуры поверхности Регула:

$$T = T_0 \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1/4} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/2}.$$

Нам неизвестен радиус Регула R, но известен период его обращения вокруг своей оси t. Определим, при каком радиусе R физическое тело может вращаться с таким периодом и не быть разорванным центробежными силами. Для этого его скорость на экваторе не должна превышать первую космическую:

$$\frac{2\pi R}{t} < \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Здесь M – масса звезды. Мы не учитываем здесь вклад тепловой скорости частиц, что будет обосновано далее. Получаем:

$$R < \left(\frac{GMt^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 5R_0.$$

$$T > T_0 \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1/4} \left(\frac{4\pi^2 R_0^3}{GMt^2}\right)^{1/6} \sim 1.5T_0 \sim 9000 \text{ K}.$$

Добавим, что при граничном значении температуры (9000 K) мы будем иметь радиус Регула в 5 радиусов Солнца и скорость осевого вращения на экваторе примерно 380 км/с. Это несравнимо больше тепловой скорости атомов водорода, соответствующей данной температуре (10 км/с), что оправдывает допущение, сделанное выше. Реальная температура на экваторе Регула немногим более 10000 K, то есть звезда находится на грани динамической устойчивости.

2. Плутон рухається по орбіті з великою піввіссю 40 а.о. і ексцентриситетом 0.25. його средний радіус дорівнює 1.2 тис. км, а геометричне альбедо 0.6. Оцініть діаметр об'єктива такого телескопа, в який Плутон могла би хоча б коли-небудь спостерігати людина з нормальним зором.

Для того, чтобы наблюдать Плутон, достаточно увидеть его как точечный объект, разрешать диск уже не требуется. Поэтому нам требуется оценить диаметр такого телескопа, при наблюдении глазом в который обеспечивалась бы проницающая способность, близкая к максимуму блеска Плутона.

Сразу же можно заметить, что наилучшими условия для наблюдения Плутона будут тогда, когда он будет находиться в районе перигелия орбиты. Соответствующее расстояние $r = a(1-e) = 30$ а.е. (где a — большая полуось орбиты, а e — эксцентриситет). Информация о наклоне орбиты Плутона не приводится, да она и не нужна, поскольку наблюдать мы его собираемся с Земли, которая намного ближе к Солнцу, чем Плутон.

Далее мы берем светимость Солнца L и вычисляем освещенность, создаваемую Солнцем на Плутоне $E' = \frac{L}{4\pi r^2}$. Если радиус Плутона R, то в единицу времени на него попадает энергия $E' \pi R^2$, а рассеивает он $\alpha E' \pi R^2$, где α — его геометрическое альбедо. В итоге на Земле Плутон создает освещенность

$$E = \frac{\alpha E' \pi R^2}{4\pi r^2}$$

(разницей между расстоянием от Солнца до Плутона и расстоянием от Плутона до Земли мы пренебрежем).

Собирая все выкладки воедино, получаем

$$E = \frac{\alpha L \pi R^2}{(4\pi r^2)^2} = \frac{\alpha L R^2}{16\pi r^4}.$$

Далее нам надо каким-либо образом привязать полученный результат к проницающей способности. Это всего сделать, оценив видимую звездную величину Плутона. Заметим, что $E_0 = \frac{L}{4\pi a^2}$ — это освещенность, создаваемая Солнцем на Земле (если a — радиус орбиты Земли), а $\beta^2 = R^2/r^2$ — квадрат углового радиуса Плутона в радианах. Тогда

$$E = \alpha E_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \beta^2 \frac{1}{4},$$

и, что приятно, из пяти сомножителей только один — размерный.

Как мы уже знаем, $r = 30$ а.е. Поскольку 1 а.е. — это $1.5 \cdot 10^8$ км, то $r = 4.5 \cdot 10^9$ км. Отсюда $\beta^2 = 7 \cdot 10^{-14}$. Кроме этого, $a/r = 1/30$. Подставляя остальные множители, получаем, что

$$\frac{E}{E_0} \approx 10^{-17}.$$

Известно, что каждый один порядок разницы освещенностей соответствует разнице на $2^m.5$ и, поскольку видимая величина Солнца близка к -26.5^m, Плутон по нашей довольно грубой оценке оказывается объектом с $+16^m$. Поскольку предельная проницающая способность невооруженного глаза $+6^m$, площадь объектива должна быть примерно в 10^4 раз больше площади зрачка, диаметр объектива должен быть в 10^2 раз больше диаметра зрачка глаза, т.е. около 0.5 м. Более аккуратные вычисления должны дать несколько меньший результат.

3. 22 червня в сонячний полудень спостерігач, що стоїть вертикально на рівній поверхні, помітив, що його тінь має довжину, рівну його зросту. На якій широті знаходився спостерігач?

1. Решение. Равенство высоты вертикального предмета и длины его тени на горизонтальной поверхности означает, что высота Солнца h составляет 45°. Так как картина наблюдается в солнечный полдень, Солнце располагается в верхней кульминации. Его высота в это время равна

$$h = 90° - \varphi + \delta, \text{ если Солнце располагается к югу от зенита } (\varphi > \delta),$$

$$h = 90° - \delta + \varphi, \text{ если Солнце располагается к северу от зенита } (\varphi < \delta).$$

Данные соотношения можно написать в виде одной формулы:

$$h = 90° - |\varphi - \delta|.$$

22 июня (в летнее солнцестояние) склонение Солнца δ положительно и равно углу наклона экватора к эклиптике ε (23.4°). Из предыдущих формул получаем выражение для широты места:

$$\varphi = \varepsilon \pm (90° - h).$$

Указанная картина могла наблюдаться на широтах –21.6° и +68.4°.

4. За однією з версій учених, роль частинок темної матерії можуть грати «вімпи» ***(WIMP - weakly interacting massive particle)*** - елементарні частинки з енергією близько 100 ГеВ. Визначте середню концентрацію вімпів в просторі, якщо маса Галактики в межах 50 кпк від центру оцінюється в $2 \cdot 10^{12}$ мас Сонця, а частка темної матерії в ній становить приблизно 80%.

5. Решение. Определим массу частицы m, исходя из того, что ее энергия E равна 10^{11} эВ или $1.6 \cdot 10^{-8}$ Дж:

$$m = \frac{E}{c^2} = 2 \cdot 10^{-25} \text{ кг.}$$

Масса Галактики составляет $2 \cdot 10^{12}$ масс Солнца или $4 \cdot 10^{42}$ кг. Определим плотность темной материи в Галактике:

$$\rho = 0.8 \frac{3M}{4\pi R^3} = 2 \cdot 10^{-22} \text{ кг / м}^3.$$

Здесь R – радиус гало Галактики, равный 50 кпк или $1.5 \cdot 10^{21}$ м. Отсюда мы имеем концентрацию частиц:

$$n = \frac{\rho}{m} = 10^3 \text{ м}^{-3}.$$

5. Для своїх спостережень Х. Гюйгенс використовував телескоп-рефрактор з діаметром об'єктива 22 см і фокусною відстанню 64 м. Об'єктив цього телескопа був підвішений на стовпі, а спостерігач з окуляром розташовувався на землі. Припустимо, перебуваючи на широті +52°, Гюйгенс проводив спостереження світила з схиленням +27° у верхній кульмінації. Яку відстань необхідно йому пройти за 15 хвилин спостереження, щоб весь час спостерігати світило в центрі поля зору? Вважати, що Гюйгенс використовував окуляр з рівнозіничним збільшенням.

4. Решение. Угловая скорость светила на небесном экваторе равна

$$\omega_0 = 2\pi/T.$$

Здесь T – продолжительность звездных суток. Длина суточной параллели со склонением δ меньше, соответствующая угловая скорость составит

$$\omega = \omega_0 \cos\delta = 2\pi \cos\delta / T.$$

Это составляет 13.4″ в секунду. За время t (15 минут) светило прочертит на небе дугу длиной

$$\gamma = \omega\, t = 2\pi \cos\delta\, t/T = 3.35°.$$

На такой же угол требуется повернуть телескоп. Наблюдатель находится от объектива на расстоянии равном сумме фокусных расстояний объектива F и окуляра f. Как известно, диаметр выходного зрачка d равен отношению диаметра объектива D к увеличению телескопа. Увеличение же равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра. Отсюда получаем фокусное расстояние окуляра:

$$f = F\, d \,/\, D.$$

Длина всего телескопа будет равна

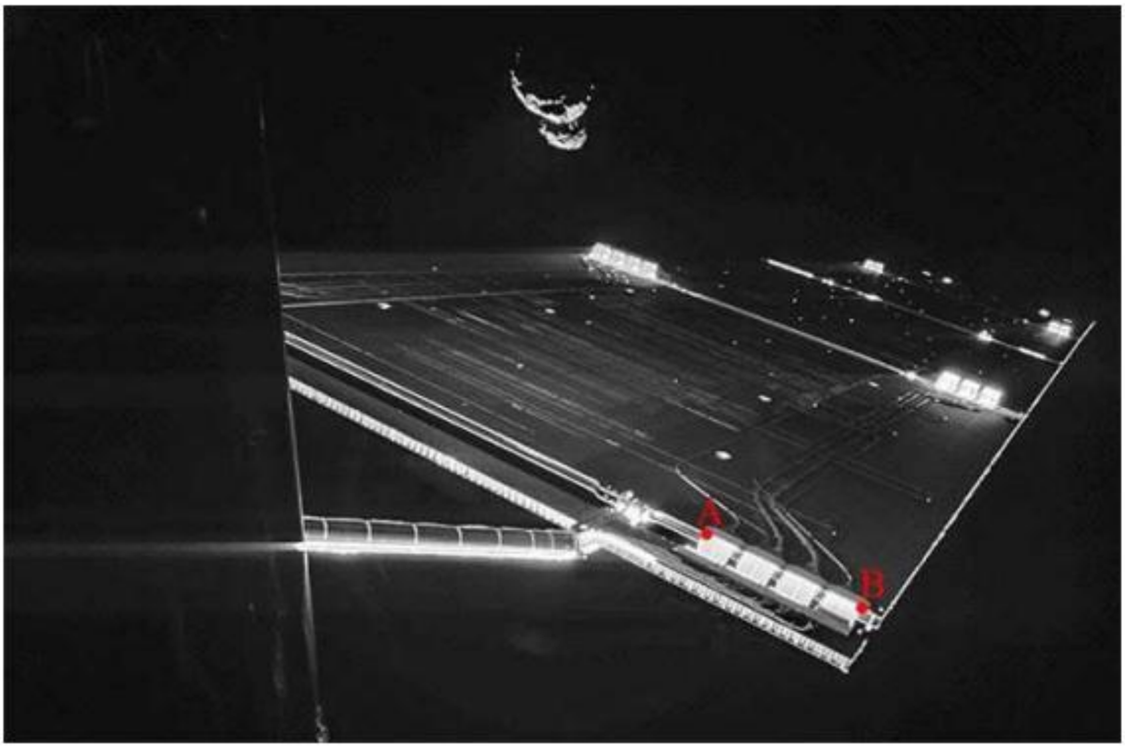
$$L = F + f = F\,(1 + d/D).$$

Считая диаметр зрачка наблюдателя равным 6 мм, получаем расстояние от наблюдателя до объектива: 65.7 м. Светило находится вблизи кульминации, движется параллельно горизонту. Поэтому наблюдатель должен также двигаться горизонтально, проходя за время t расстояние

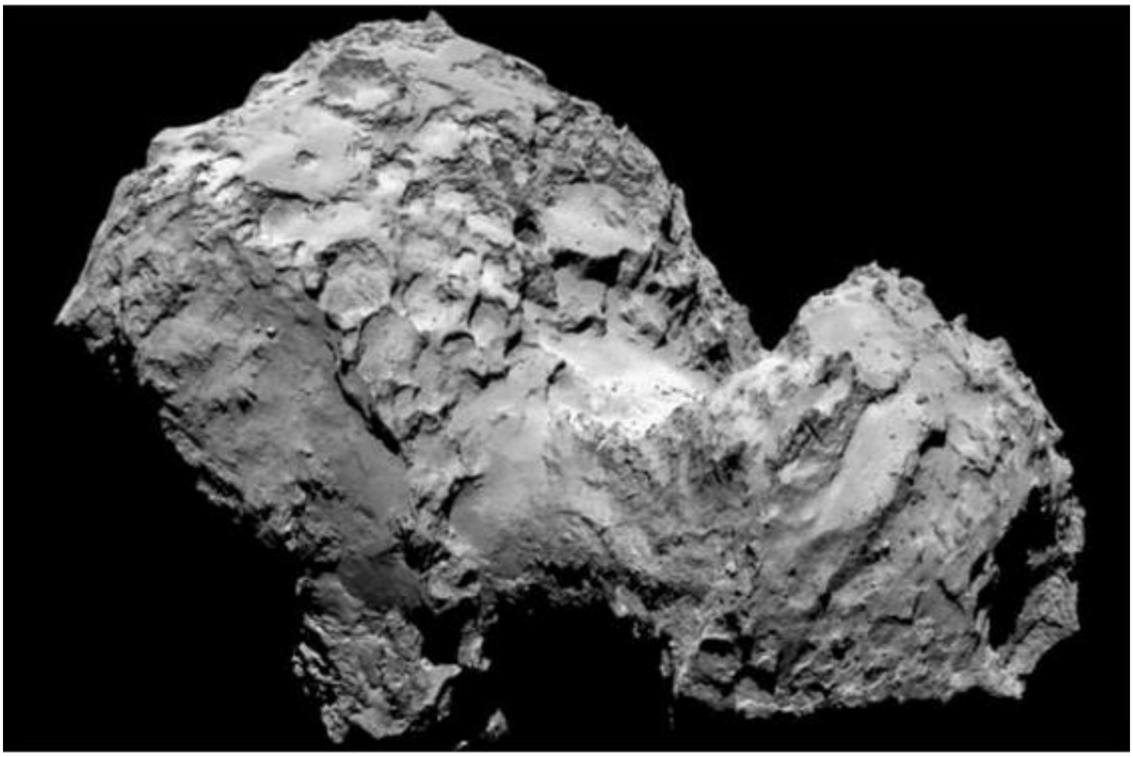
$$l = L \sin\gamma \sim L\,\gamma \text{ (рад)} = 3.8 \text{ м.}$$

Експериментальне завдання.

1. 7 вересня 2014 року космічним апаратом (КА) Rosetta, за допомогою автоматизованого «ока» модуля Philae була зроблена фотографія-селфі (див. мал), на якій можна побачити сонячну батарею апарату Rosetta на тлі ядра комети 67P/Чурюмова-Герасименко. Відомо, що довжина «дверної петлі» сонячної батареї (відрізок AB) дорівнює 30 см, а відстань від петлі до об’єктива фотокамери - 230 см. На мал. представлена для порівняння фотографія ядра 67P/Чурюмова-Герасименко з високою роздільною здатністю, розміри якого дорівнюють 3×5 км. У момент отримання фотографії КА рухався навколо ядра комети по коловій орбіті з періодом 31,9 діб. Використовуючи наявні дані, визначте радіус орбіти КА і масу ядра комети.



Селфі, яке отримали апаратом Rosetta. На фото потрапило ядро 67P/Чурюмова-Герасименко



Фотографія ядра 67P/Чурюмова-Герасименко з високою роздільною здатністю, яку отримали апаратом Rosetta.

Дано:

$d = 230$ см,
$\ell = 30$ см,
$a \times b = 3 \times 5$ км,
$T = 31.9$ сут

Найти:

r, $\mathfrak{M}_N$ – ?

Решение:

Заметим, что "дверная петля" солнечной батареи видна почти плашмя, т.е. световые лучи от нее идут почти перпендикулярно ее главному измерению (определяемому его длиной). Следовательно, легко определить угол (α), под которым она видна для камеры Philae: из треугольника $\triangle OAC$ (см. рис. 13, здесь в точке О расположена камера) следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\ell}{2d}, \;\Rightarrow\; \alpha = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\ell}{2d}\right) = 7.46^\circ. \qquad (13)$$

Рис. 12: Фотография ядра 67P/Чурюмова-Герасименко с высоким разрешением, полученная аппаратом Rosetta.

Зная угол α и линейный размер петли на фотографии $\ell_\alpha = 25$ мм (последний определяем по фотографии линейкой, в мм; следует помнить, что ваш результат может отличаться от выше приведенного) можно определить угловой масштаб фотографии μ'_ℓ:

$$\mu'_\ell = \frac{\alpha}{\ell_\alpha} = 0.298^\circ/\text{мм}. \qquad (14)$$

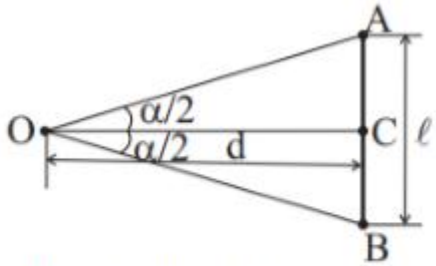


Рис. 13: к определению угла α.

Из сопоставления фотографий (11) и (12) следует, что на фотографии видна сторона ядра, характеризуемая меньшим измерением b, которое можно определить как

$$b = 2\,r\,\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right), \qquad (15)$$

где β – угол, под которым видно с борта КА меньшее измерение ядра, определяемое величиной b. Данный угол определяем с использованием углового масштаба фотографии и расстояния r:

$$\beta = \mu'_\ell\,\ell_\beta = 3.58^\circ,$$

здесь $\ell_\beta = 12$ мм – значение меньшего измерения ядра кометы, определяемое по рисунку (в мм).

С использованием выше приведенных рассуждений и формулы (13) легко найти расстояние до ядра кометы (радиус орбиты космического аппарата Rosetta):

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2r}, \;\Rightarrow\; r = \frac{b}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = 48\,\text{км}. \qquad (16)$$

Далее воспользуемся вторым законом Ньютона для КА, движущегося по круговой орбите (в проекциях на правление "КА-ядро кометы"):

$$m_{sc}a_{sc} = \frac{G\,m_{sc}\,\mathfrak{M}_N}{r^2}, \qquad (17)$$

здесь m_{sc}, a_{sc} – масса и ускорение КА. При движении по круговой орбите a_{sc} есть центростремительное ускорение, которое можно представить виде:

$$a_{sc} = \omega_{sc}^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2}r.$$

В результате второй закон Ньютона (17) представляется в виде:

$$\frac{4\pi^2}{T^2}r = \frac{G\,\mathfrak{M}_N}{r^2}, \;\Rightarrow\; \mathfrak{M}_N = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = 9\cdot 10^{12}\ \text{кг}. \qquad (18)$$

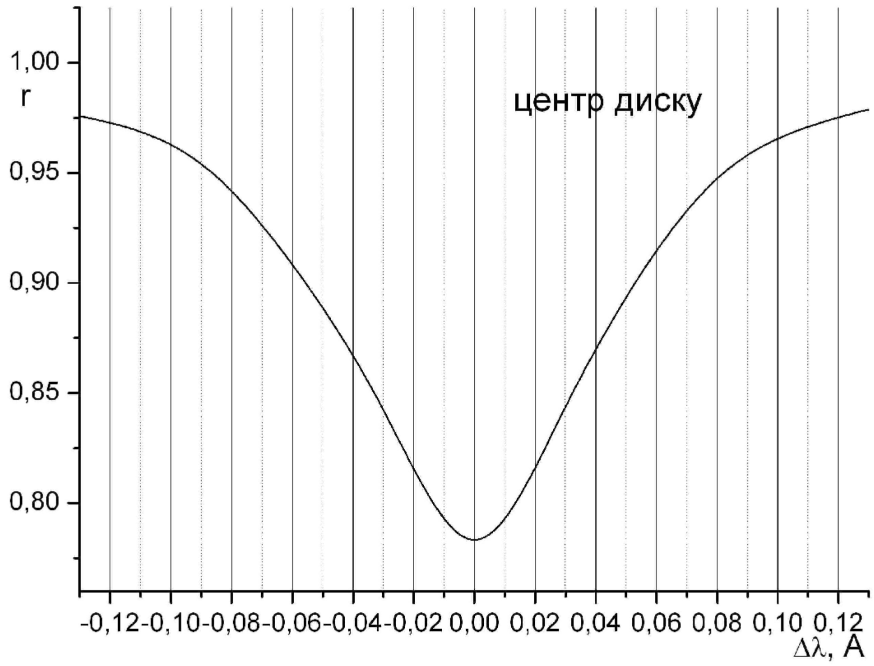
Последний результат согласуется с наиболее точными гравиметрическими оценками массы ядра кометы ($\mathfrak{M}_N = (1.0 \pm 0.1)\cdot 10^{13}$ кг).

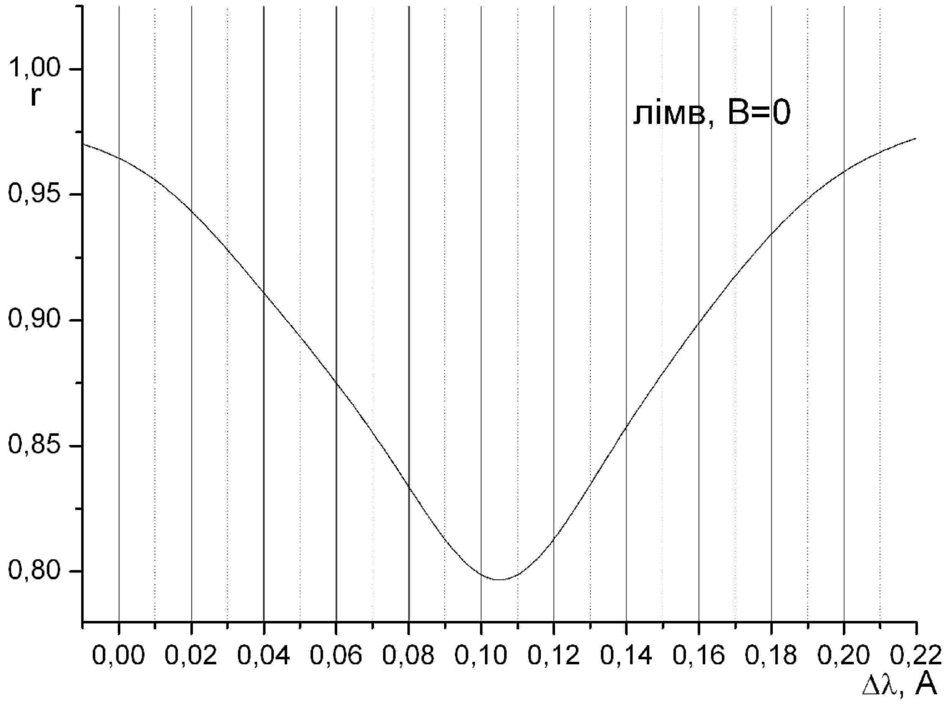
Ответ: $r = 48$ км, $\mathfrak{M}_N = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = 9\cdot 10^{12}$ кг.

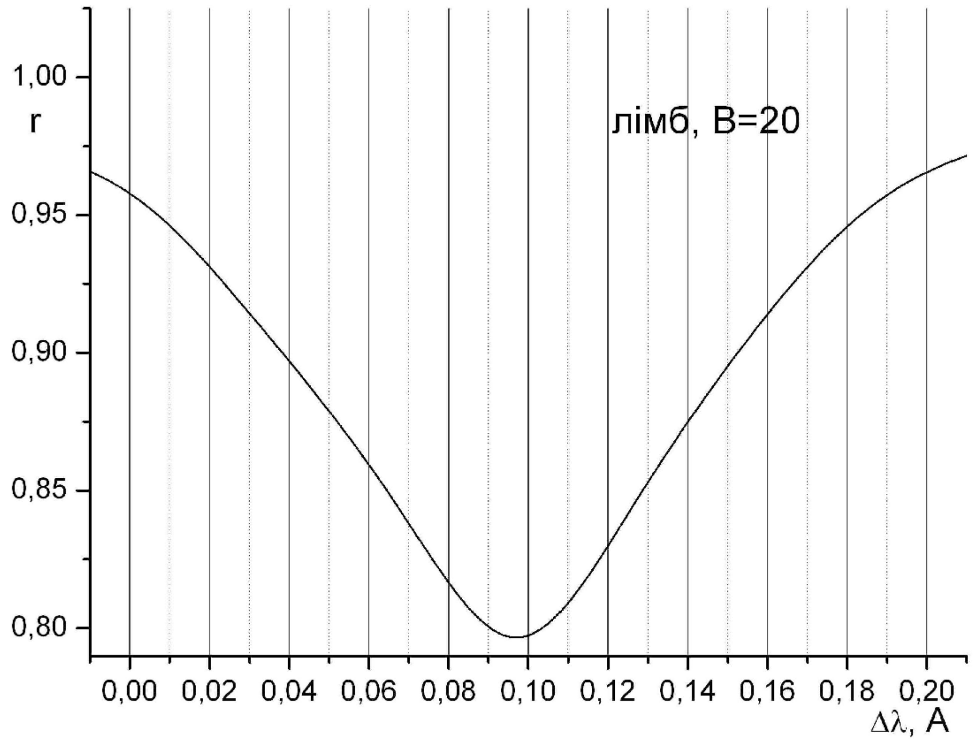
2**.** Сонце обертається не як тверде тіло, а диференціально: кутова швидкість залежить від геліографічної широти *B*. За даними спостережень в лінії нейтрального заліза l=15648.5A в центрі та на лімбі (край диска) Сонця на різних геліографічних широтах отримати залежність кутової швидкості від широти. Кутову швидкість виразити в град/добу, середній радіус Сонця 696000 км. Результати занести в таблицю (зразок наведено) та зобразити графічно. Визначити період обертання на екваторі та зробити оцінку періода поблизу полюсів. Які це періоди – синодичні, чи сидеричні?

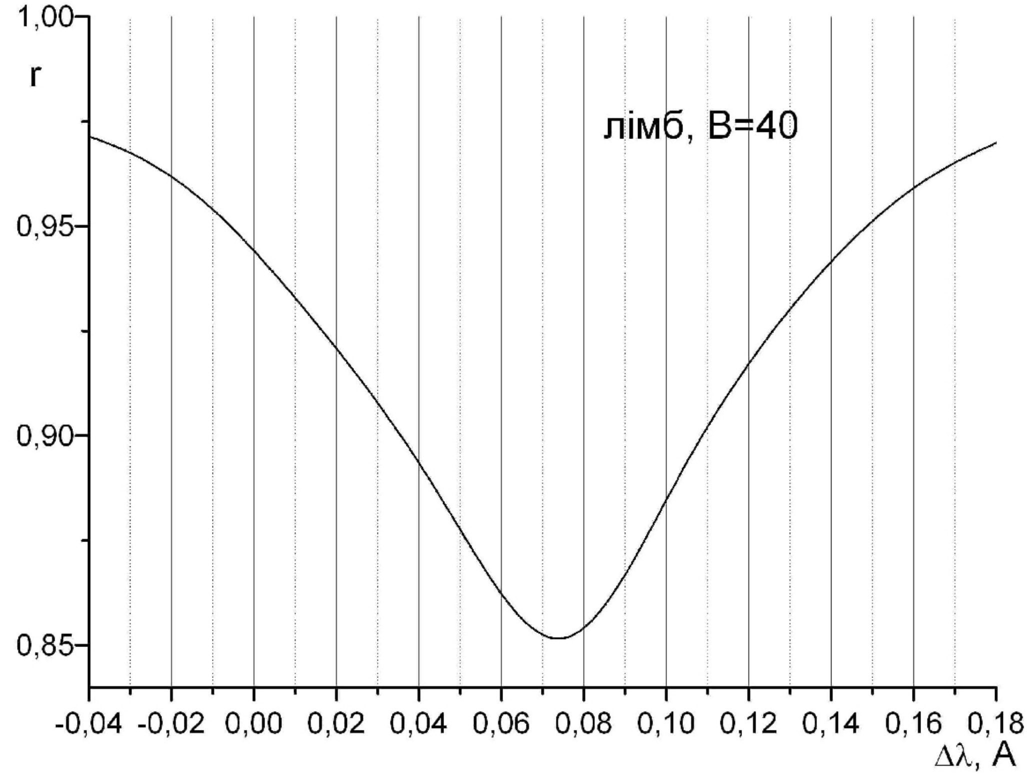
(Вважати, що наведені залишкові інтенсивності лінії *r* для різних ділянок диску Сонця отримані одночасно та не чутливі до локальних вертикальних потоків речовини через низьку просторову роздільну здатність).

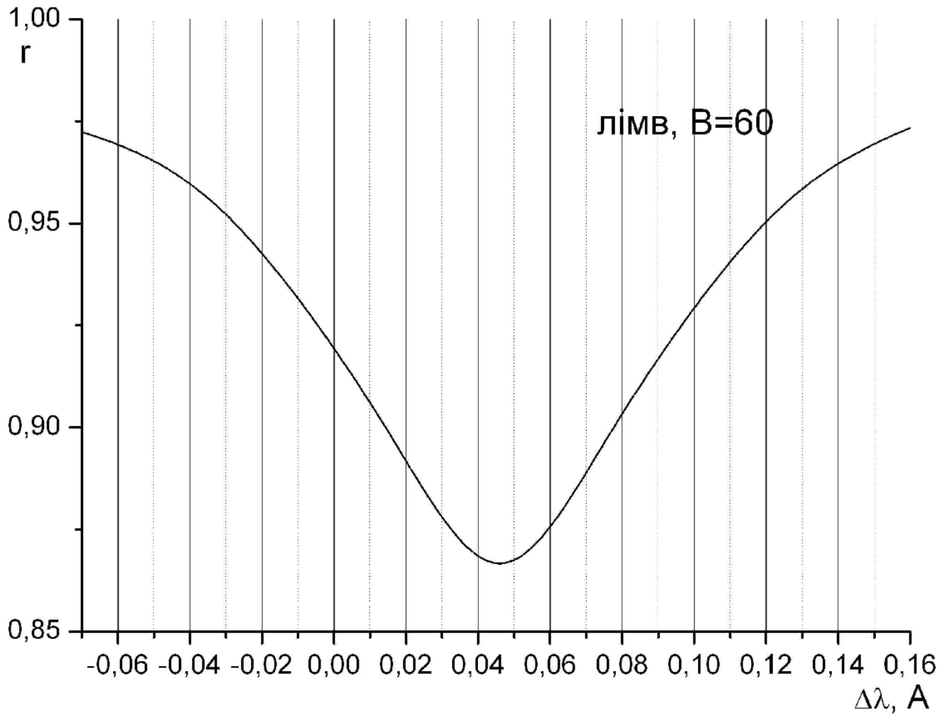
B, град	Δλ, A	υ, км/с	ω, град/доба


1,00
r
0,95
0,90
0,85
0,80
центр диску
-0,12-0,10-0,08-0,06-0,04-0,02 0,00 0,02 0,04 0,06 0,08 0,10 0,12
Δλ, A


1,00
r
0,95
0,90
0,85
0,80
лімв, B=0
0,00 0,02 0,04 0,06 0,08 0,10 0,12 0,14 0,16 0,18 0,20 0,22
Δλ, A


1,00
r
0,95
0,90
0,85
0,80
лімб, B=20
0,00 0,02 0,04 0,06 0,08 0,10 0,12 0,14 0,16 0,18 0,20
Δλ, A


1,00
r
0,95
0,90
0,85
лімб, B=40
-0,04 -0,02 0,00 0,02 0,04 0,06 0,08 0,10 0,12 0,14 0,16 0,18
Δλ, A



1,00
r
0,95
0,90
0,85
лімв, B=60
-0,06
-0,04
-0,02
0,00
0,02
0,04
0,06
0,08
0,10
0,12
0,14
0,16
Δλ, A

РОЗВ'ЯЗОК

За доплерівськими зсувами ліній визначаємо швидкість обертання Сонця

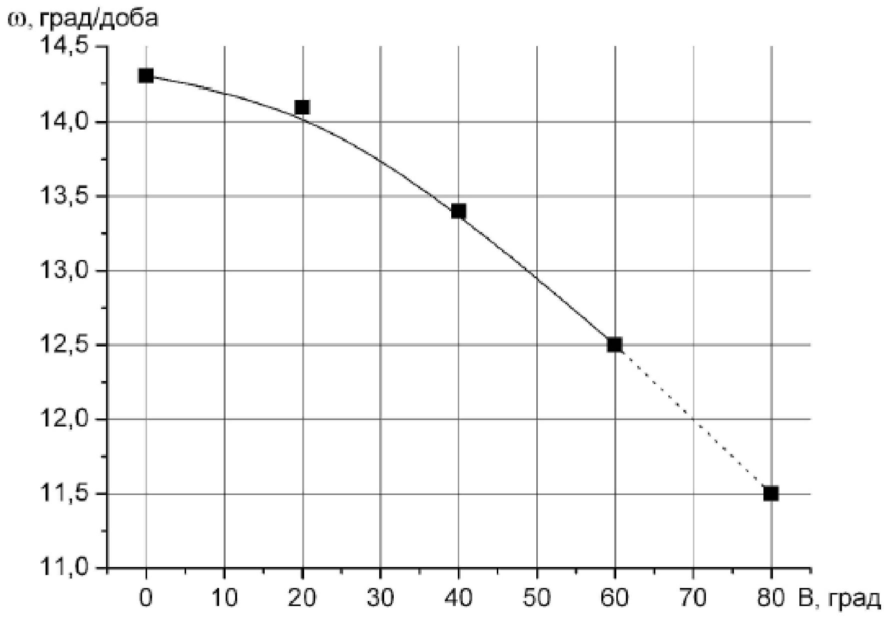
$$v = c*\Delta\lambda/\lambda_o.$$

Використовуючи співвідношення $\omega = v / (R*\cos B)$, отримаємо залежність кутової швидкості від широти.

Отримані дані представлені в таблиці.

B, град	Δλ, A	v, км/с	ω, град/доба
0	0.105	2.01	14.3
20	0.097	1.86	14.1
40	0.075	1.44	13.4
60	0.046	0.88	12.5

Залежність ω = ω(B) показана на графіку.



Проінтерполювавши залежність на B=80 град, визначимо період обертання поблизу полюсів T ≈ 31 добу, на екваторі - . ≈ 25 діб.

Отримані значення періодів - це сидеричні значення, оскільки рух Землі виключено, так як розглядаємо відносні зміщення спектрів.